Molnár-Sáska Gáborné:

Hajós György Versenyre javasolt feladatok SZIE.YMÉTK

2011

1. **Írja fel a számokat 1-től 2011-ig egymás után! Határozza meg az így kapott nagy szám 30-cal való osztási maradékát!**

2. Az $\{a_n\}$ valós számsorozat n-edik eleme $a_n = pn^2 + qn + r$, továbbá első n elemének összege $(n-1)n(n+1)$. Határozza meg a $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{3n^2+1}$ határértéket!

3. Tekintsük az összes olyan $(x; y)$ számpárt, mely teljesíti az
$$x^2y^2 + x^2 - 6xy - 10x + 18 = 0$$
egyenletet. Határozza meg az xy szorzat maximális és minimális értékét!

4. Tudjuk, hogy az ABC háromszög „a" oldala mértani közepe a másik két oldalnak. Határozza meg az „a" oldallal szemközti szög maximumát!

5. Lefedhető-e a sík véges sok parabolatartománnyal?

6. Egy kosárban 1987 piros és 1985 fehér golyó van. Megengedjük a következő műveletek akárhányszori és tetszőleges sorrendben történő végrehajtását:
   a. berakni 2 piros, s kivenni 1 fehér golyót
   b. berakni 1 piros,s kivenni 2 fehér golyót
   c. kivenni 2 piros golyót és berakni 1 fehér golyót
   d. kivenni 1 piros és 2 fehér golyót

   Ilyen műveletek alkalmazásával elérhető-e, hogy a kosárban 2011 piros és 2011 fehér golyó legyen?

Klincsik Mihály:

1. **Feladat (20 pont)**

   Mutassuk meg, hogy létezik olyan maximális térfogatú henger, amelyet beírhatunk egy O középpontú, R sugarú gömb, valamint egy olyan kúp belsejébe, amelynek csúcspontja az O pont és a gömböt egy r sugarú (r<R) körben metszi. Feltesszük, hogy a beírt henger és a kúp tengelye egybeesik.

2. **Feladat (15 pont)**

   Legyen az u_n sorozat első három eleme $u_0=u_1=u_2=1$ adott. A sorozat további elemeit a

   $$det\begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+2} & u_{n+3} \end{pmatrix} = n! \qquad \textbf{(n=0,1,2, …)}$$

   képzési szabály alapján kapjuk, ahol $n!=1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)\cdot n$ a faktoriálist és

   $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$ **determinánst jelöli. Adja mrg a sorozet u_n elemét *n* függvényeként!**

   Mutassuk meg, hogy az u_n sorozat minden eleme egész szám. (Megállapodás szerint 0!=1)

3. **Feladat (20 pont)**

   Tekintsük a $p(x) = 4 \cdot x^3 + a \cdot x$ harmadfokú polinomokat, az 'a' valós paraméterek mellett. Jelölje M(a) a polinom abszolút értékének maximumát a $-1 \leq x \leq 1$ zárt intervallumban, azaz $M(a) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)|$.

   (i) Határozzuk meg azt az egyetlen $a = a^*$ paraméter értéket, amelyre $M(a^*) = 1$ teljesül!

   (ii) Igazoljuk, hogy minden más $a \neq a^*$ valós paraméter mellett M(a)>1 igaz!

4. **Feladat (14 pont)**

   Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \geq 3$ természetes számhoz megadhatók olyan x_n és y_n páratlan egész számok, amelyekkel

   $$2^n = 7 \cdot x_n^2 + y_n^2 \ .$$

5. **Feladat (18 pont)**

   Határozzuk meg a legkisebb k egész számot úgy, hogy létezzen hozzá egy 25 csúcspontú olyan gráf, amelyben teljesülnek a

   (i) minden csúcspontnak pontosan k szomszédos csúcspontja van;

   (ii) bármely két nem szomszédos csúcspont szomszédos lesz valamely harmadik csúcsponttal feltételek.

Makó Margit:

1. Minden négyjegyű természetes számot osszunk el számjegyeinek összegével! Mekkora az így kapott hányadosok közül a legkisebb és a legnagyobb?

2. Határozza meg az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet együtthatóit úgy, hogy $-a, \quad -2b, \quad -2c$ megoldása legyen az egyenletnek.

3. Az $f(x)$ függvényre valamely rögzített a esetén fennáll az $f(x) = \dfrac{f(x+a)-1}{f(x+a)+1}$ azonosság. Igazolja, hogy $f(x)$ periodikus!

4. Legyenek A,B,C pontok a 2 egység oldalélű kocka páronként kitérő élein egy-egy pont, melyek közül az A felezőpont, B, C helyzete tetszőleges. B, C pontok mely helyzetében lesz az ABC háromszög kerülete a legkisebb?

5. **Legyen az** $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{p}{2}x^2 + qx + r$ **függvénynek az x=α, a** $g(x) = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{p}{2}x^2 + qx + s$ **függvénynek pedig az x=β szélsőérték helye. Bizonyítsuk be, hogy** $h(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{p}{2}x^2 + qx + t$ **van szélsőérték helye α és β között.**

Csató Sándor: A Hajós György Matematika Versenyre javasolt feladatok

SZTE MÉRNÖKI KAR, 2011

1. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$6\left(\frac{3^x-2^x}{2}\right)^2+\log_6\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^2=x$$

2. Tekintsük az

$$a_n=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}},\quad n\in N^+$$

sorozatot! Bizonyítsuk be, hogy a sorozat tagjaira teljesül az

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$$

összefüggés minden $n\in N^+$-ra.

3. Tekintsük az $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x^2}{x^2+1}\right)$, $x\in R$ függvényt! Bizonyítsuk be, hogy a függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $0<x$, és szigorúan monoton növekvő $x<0$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $0<x<\frac{\pi}{2}$**, akkor**

$$2x<\sin x+tg\,x.$$

5. Tekintsünk egy téglalapot! Rajzoljuk meg a téglalap körülírt körét. Bizonyítsuk be, hogy a kör egy pontjából a téglalap átlóira bocsátott merőlegesek talppontjainak távolsága független a pont választásától!

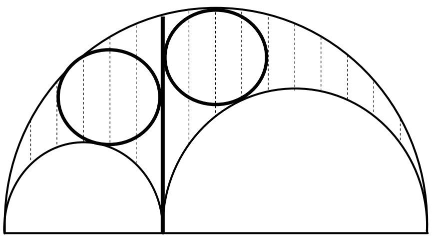
Szeged, 2011. 04. 07.

Tóth Zoltán:

A Hajós György Matematika Versenyre javasolt feladatok

KRF GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR, 2011

1. **Az alábbi ábrán függőlegesen vonalkázott részt holdkésnek (arbelosz) nevezte Arkhimé-dész. Igazoljuk, hogy a kis körök sugara megegyezik, bárhogy is választjuk a D pontot!**

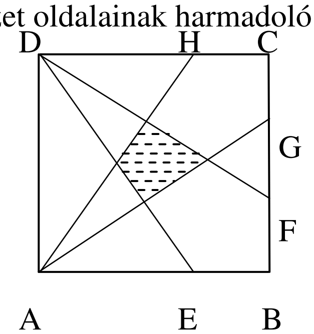


2. Adjuk meg azt a k pozitív egész számot, amelyre teljesül az alábbi egyenlőtlenség!

$$2010 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2011$$

3. Az $f(x) = \frac{1}{4p}x^2$ parabola (0,p) fókuszpontjába világító testet teszünk. Igazoljuk, hogy a parabolatükörről visszaverődő fénysugarak az y tengellyel párhuzamosan haladnak! (A fénysugarak úgy verődnek vissza a paraboláról, mint egy síktükörről, amit érintőlegesen a parabolához illesztettünk az adott pontban.)

4. Határozzuk meg a vonalkázott rész területét, ha az E, F, G, H pontok az ABCD 3 egység oldalhosszú négyzet oldalainak harmadoló pontjai!



5. Egy egységnyi oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszög A és C csúcsa illeszkedik az y tengelyre, majd úgy mozog, hogy az A pont az x, míg a C pont az y tengelyre illeszkedik. Határozzuk meg a B csúcs által leírt görbe egyenletét, miközben az A pont az origóból az x=1 pontba jut!